

- 1- Circulación de  $\overline{f(x, y)} = (x, e^{(x-y)^2})$  a lo largo de la frontera de la región  $D = \{(x, y) / 1 \leq x + y \leq 4, -1 \leq x - y \leq 1\}$ .

- Solución:

Aplicando el teorema de Green puesto que se verifican las hipótesis, tenemos:

$$\text{Circul.} = \iint_D e^{(x-y)^2} 2(x-y) dx dy$$

Hacemos  $\begin{cases} u = x + y \\ v = x - y \end{cases}$  donde  $1 \leq u \leq 4$ ;  $-1 \leq v \leq 1$  y el Jacobiano de esta

transformación es:  $J\left(\frac{u, v}{x, y}\right) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2$ , entonces el Jacobiano en valor absoluto es

$$\left| J\left(\frac{u, v}{x, y}\right) \right| = |-2| = 2 = \frac{1}{\left| J\left(\frac{x, y}{u, v}\right) \right|} \Rightarrow \left| J\left(\frac{x, y}{u, v}\right) \right| = \frac{1}{2}.$$

Se puede sacar también del cambio de variables encontrando  $x, y$  en función de  $u, v$ , de la forma siguiente:

$$\begin{cases} x = \frac{u+v}{2} \\ y = \frac{u-v}{2} \end{cases} \Rightarrow \left| J\left(\frac{x, y}{u, v}\right) \right| = \left\| \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} \right\| = \left| -\frac{1}{4} - \frac{1}{4} \right| = \frac{1}{2}$$

$$\text{Circul.} = \int_1^4 du \int_{-1}^1 e^{v^2} 2v \frac{1}{2} dv = \frac{1}{2} \int_1^4 \left[ e^{v^2} \right]_{-1}^1 du = \frac{1}{2} \int_1^4 (e - e) du = 0$$

- 2- Dado  $\overline{f(x, y)} = (x, e^x - y)$  determine la línea de campo que pasa por  $(1, e)$

Solución:

$$\frac{dy}{e^x - y} = \frac{dx}{x} \Rightarrow x dy = (e^x - y) dx \Rightarrow (e^x - y) dx - x dy = 0$$

$$\text{Como } \frac{\partial P}{\partial y} = -1 = \frac{\partial Q}{\partial x} \Rightarrow \text{Es una Ecuación Diferencial Exacta}$$

Encontramos la función potencial:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = e^x - y \quad \Rightarrow \quad \phi = \int (e^x - y) dx = e^x - yx + C(y)$$

$$\text{derivando respecto de "y": } \frac{\partial \phi}{\partial y} = -x + C'(y) = -x \quad \Rightarrow \quad C'(y) = 0 \quad \Rightarrow \quad C(y) = k$$

$$\Rightarrow \phi(x, y) = e^x - yx + k \quad \Rightarrow \text{Solución: } e^x - yx = K$$

$$\text{Pasa por } (1, e), \text{ entonces: } e^1 - e \cdot 1 = K \quad \Rightarrow \quad K = 0$$

$$\text{Respuesta: La línea de campo es } e^x - yx = 0 \quad \text{o} \quad y = \frac{e^x}{x}$$

**Observación:** También la ecuación es lineal, así que puede ser resuelta por ese método.

**3- Hallar la circulación de  $\vec{F}(x, y, z) = (x - y^2, y, yz - \frac{x^2}{4})$  a lo largo de la curva  $C$ , dada por la intersección del plano tangente a la superficie  $x^2 + 2y^2 + z^2 = 4$  en el punto  $(1, 1, 1)$  con los planos coordenados.**

**Solución:** El plano tangente es:  $N \cdot (x - 1, y - 1, z - 1) = 0$  siendo  $N$  la normal al plano, que es la normal a la superficie.

Para determinar  $N$  definimos la función  $f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + z^2 - 4$ , la superficie de nivel 0 de  $f$  es  $x^2 + 2y^2 + z^2 = 4$ , el gradiente de  $f$  es un vector normal a la superficie y por lo tanto normal al plano tangente.

Encontramos  $N$ :

$$\nabla f = (2x, 4y, 2z) \quad \Rightarrow \quad \nabla f(1, 1, 1) = (2, 4, 2) = 2(1, 2, 1)$$

De donde  $N = (1, 2, 1)$ , entonces la ecuación del plano tangente es:

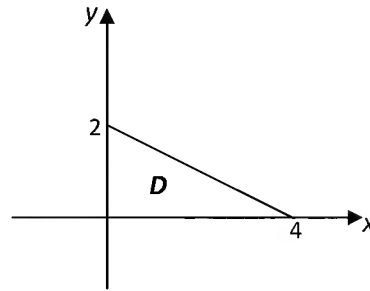
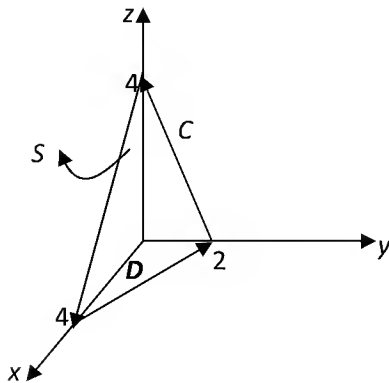
$$(1, 2, 1) \cdot (x - 1, y - 1, z - 1) = 0 \quad \rightarrow \quad x - 1 + 2y - 2 + z - 1 = 0 \quad \rightarrow \quad \underline{x + 2y + z = 4}$$

Para calcular la circulación se usa el teorema de Stokes pues se verifican las hipótesis (verifícalas). Este teorema relaciona una integral de línea con una de superficie y dice que, bajo ciertas condiciones, la circulación de  $\vec{F}$  a lo largo de  $C$  es igual al flujo del rotor del campo a través de la superficie  $S$ , es decir:  $\int_C \vec{F}(x, y, z) \cdot d\vec{s} = \iint_S \nabla \times \vec{F} \cdot \vec{n} \, ds$  donde  $S$  es una superficie abierta y  $C$  la curva frontera de  $S$ .

El rotor de  $\overline{F}$  es:  $\nabla \times \overline{F} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x - y^2 & y & yz - \frac{x^2}{4} \end{vmatrix} = (z, \frac{x}{2}, 2y)$

$$\int_C \overline{F}(x, y, z) \cdot d\overline{s} = \iint_S \nabla \times \overline{F} \cdot \vec{n} \, ds$$

$$= \iint_D (z, \frac{x}{2}, 2y) \cdot (1, 2, 1) \, dx \, dy = \iint_D 4 \, dx \, dy = 4 \text{Area}(D) = 4 \cdot 4 = 16$$



**4. Hallar flujo de  $\overline{F}(x, y, z) = (x + e^z \sin(xz) + y, yx + z)$  a través de la frontera del cuerpo  $K = \{(x, y, z) / z^2 \geq x^2 + y^2; x^2 + y^2 + z^2 \leq 4; z \geq 0\}$ , considerando normal saliente.**

**Solución:** Usando Teorema de la divergencia, previo verificar hipótesis, tenemos:

$$\begin{aligned} \text{Flujo} &= \iiint_K \overline{F} \cdot \vec{n} \, ds = \iiint_K \text{div}(\overline{F}) \, dx \, dy \, dz = \iiint_K 3 \, dx \, dy \, dz \\ &= 3 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi/4} d\varphi \int_0^2 \rho^2 \sin(\varphi) \, d\rho = 3 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi/4} \sin(\varphi) \left[ \frac{\rho^3}{3} \right]_0^2 d\varphi = \\ &= 3 \cdot \frac{8}{3} \int_0^{2\pi} d\theta \left[ -\cos(\varphi) \right]_0^{\pi/4} = 8 \int_0^{2\pi} [(-\cos(\pi/4)) - (-\cos(0))] d\theta = \\ &= 8 \int_0^{2\pi} \left( -\frac{\sqrt{2}}{2} + 1 \right) d\theta = 8 \left( -\frac{\sqrt{2}}{2} + 2 \right) \cdot 2\pi = (-8\sqrt{2} + 16) \pi \end{aligned}$$

**Observación:** El cuerpo K es el que está por encima del cono y debajo de la esfera. Se resuelve el ejercicio pasando a coordenadas esféricas. Haga una representación gráfica para ver como salen los límites.

**5. Calcular la circulación de  $\overline{G}(x, y) = (f'_{xx}, f'_{xy})$  a lo largo del segmento  $\overline{AB}$  (desde A hacia B), siendo  $f$  de clase  $C^\infty$  en  $R^2$  y sabiendo que:**

**i)  $f$  tiene extremo local en A.**

**ii)  $T_2(x, y) = 1 + x - 2y^2$  es el polinomio de Taylor de orden 2 de  $f$  en B.**

**Solución:**

El campo dado es el gradiente de  $f'_x$ , es decir,  $\overline{G}(x, y) = \nabla(f'_x)$ , por lo tanto  $f'_x$  es el potencial de  $\overline{G}$ . La circulación es:

$$\int_{\overline{AB}} \overline{G}(x, y) \cdot \overline{ds} = \int_{\overline{AB}} \nabla(f'_x) \cdot \overline{ds} = f'_x(B) - f'_x(A) = 1 - 0 = 1$$

Estos valores resultan de: 1)  $f'_x(A) = 0$  pues  $f$  tiene extremo en A (A punto Estacionario).

$$2) f'_x(B) = (T_2)'_x(B) = 1$$